Divizibilitate. Explicații și probleme. 1

Spunem că un număr *m* este divizibil cu un număr *n* atunci când *m* se împarte exact la *n*, fără rest. În acest caz, *m* este multiplu al lui *n*, iar *n* este divizor al lui *m*. Pentru că ne referim la împărțiri exacte, divizibilitatea se întâmplă în mulțimea numerelor întregi, așa cum învățăm în clasa a VI-a.

Înainte de a trece la notații, este bine, dragi copii, să faceți diferența între noțiunile de *divizori* și *multipli*. Divizorii unui număr pot fi priviți ca niște numere mai mici, care înmulțite ne pot da numărul de la care pornim. De exemplu, numărul 4 se împarte exact la 1, 2 și 4. Deci divizorii naturali ai lui 4 sunt 1, 2, 4. Am specificat *naturali* pentru că, în cazul în care exercițiul cere enumerarea divizorilor întregi, atunci avem și numerele cu minus, respectiv -1, -2 și -4.

Divizorii naturali ai unui număr pot fi proprii și improprii. Cei improprii sunt numărul în cauză și 1, care este divizor al oricărui număr. Un număr natural care are doar divizori improprii se numește număr prim. De exemplu 5, 7, 11, 103 etc. Orice număr natural care are și divizori improprii se numește număr compus. De exemplu 12, 100, 250. Nu vom explica aici criteriile de divizibilitate, voi face un articol separat pentru asta.

Mulțimea divizorilor unui număr se scrie la fel ca orice mulțime, de exemplu:
$D_{24} = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24\}$,
Deci se enumeră între acolade numerele naturale cu care este divizibil 24.
La fel, mulțimea multiplilor unui număr se face prin enumerarea între acolade.
$M_3 = \{0, 3, 6, 9, 12, 15, 18, \ldots.\}$

Sunt cazuri în care trebuie să lucrăm cu mai multe numere, care fie au nevoie să se împartă la același număr, ori să găsim un număr care se împarte la acestea. De exemplu, o problemă simplă: *Care este capacitatea minimă a unui acvariu, dacă acesta poate fi umplut folosind vase de 8 litri, 10 litri sau 12 litri?* În acest caz, noi trebuie să găsim cel mai mic număr (nenul, desigur) care se împarte exact și la 8, și la 10, și la 12. Este bine să descmpunem numerele în produse de puteri, și avem: $8 = 2^3$, $10 = 2 \cdot 5$, $12 = 2^2 \cdot 3$. Cel mai mic multiplu comun se află din înmulțirea tuturor divizorilor, comuni și necomuni, ai acestor numere, luați o singură dată, la cea mai mare putere. Deci cel mai mic multiplu comun, care mai poate fi notat și cmmmc sau $[8, 10, 12] = 2^3 \cdot 3 \cdot 5 = 120$.

Încă o problemă simplă: *Tatăl împarte în mod egal copiilor săi 12 ciocolățele, 18 napolitane și 30 de cornuri cu ciocolată. Aflați numărul copiilor din familie.* De data asta, noi trebui să găsim un număr la care se împart cele trei numere, adică un divizor comun. Chiar dacă, uneori, exprimările enunțurilor problemelor nu sunt foarte explicite, în cazul acestei probleme trebuie să găsim cel mai mare număr la care se împart cele trei numere. Altfel, putem spune mereu că divizorul comun este 1, deci tatăl are un copil care primește toate dulciurile și nu mai trebuie să rezolvăm nimic. Revenind, vom căuta cel mai mare număr la care se împart cele 3 numere, le descompunem cu bară, și obținem: $12 = 2^3 \cdot 3$, $18 = 2 \cdot 3^2$, $30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$. Deci cmmdc sau (12, 18, 30) înseamnă să luăm divizorii comuni, o singură dată, la cea mai mică putere, și observăm că la fiecare descompunere ne apar numerele 2 și 3, deci $(12, 18, 30) = 2 \cdot 3 = 6$.

Problemele mai dificile apar atunci când divizibilitatea este combinată cu teorema împărțirii cu rest, în primă fază, sau la capitolul expresii algebrice. Azi vom rezolva câteva probleme de divizibilitate în combinație cu împărțirea cu rest, probleme preluate din culegerea *Matematică. Exerciții și probleme*, *clasa a VI-a*, de la Ed. Booklet, 2018. În fond, putem culege probleme din orice culegere de matematică de gimnaziu, dar asta mi-a fost cea mai aproape acum.

1. *Numerele naturale 297, 373 și 429, împărțite la același număr natural nenul n, dau resturile 17, 13, respectiv 9. Aflați numărul n.*

Vom scrie matematic enunțul problemei, în primă fază:

297 : n = C1, r 17

373 : n = C2, r 13

429 : n = C3, r. 9

Observăm că, dacă scădem din numerele 297, 373 și 429 resturile 17, 13, respectiv 9, vom obține 3 numere care se împart exact la n.

Deci $(297 - 17) \vdots n$, $(373 - 13) \vdots n$ și $(429 - 9) \vdots n$

Efectuăm scăderile, și obținem: $280 \vdots n$, $360 \vdots n$ și $420 \vdots n$.

Decompunem numerele cu bară și avem: $280 = 2^3 \cdot 5 \cdot 7$, $360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$, $420 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$. De aici, luăm divizorii comuni, o singură dată, la cea mai mică putere, deci $(280, 360, 420) = 2^2 \cdot 5 = 20$

2. *Aflați cel mai mic număr natural care împărțit, pe rând, la 18, 45 și 54, dă de fiecare dată restul 17 și câturi nenule.*

La fel ca mai sus, rescriem problema în formă matematică:

n : 18 = C1 r 17

n : 45 = C2, r17

n : 54 = C3, r 17.

Așadar, dacă avem același rest 17 la cele 3 împărțiri, putem considera că, scăzând acel rest, vom ajunge la un număr care se împarte exact la 18, 45 și 54. Cu alte cuvinte:

$(n - 17) \vdots 18$

$(n - 17) \vdots 45$

$(n - 17) \vdots 54$.

Nu ne rămâne decât să aflăm cel mai mic multiplu comun pentru cele trei numere, la care să adăugăm restul cel trei împărțiri. Numerele, descompuse în produse de puteri de numere prime, sunt: $18 = 2 \cdot 3^2$, $45 = 3^2 \cdot 5$, $54 = 2 \cdot 3^3$, deci cmmmc $= 2 \cdot 3^3 \cdot 5 = 270$.

De aici, $(n - 17) = 270$, deci $n = 270 + 17$, $n = 287$.

Voi reveni cu al doilea articol pe acest subiect, cu probleme similare, precum și cu problemele care apar la fracțiile algebrice.

.